

# **INCOMPLETE INFORMATION AND HETEROGENEOUS BELIEFS IN CONTINUOUS-TIME FINANCE**



**ALEXANDRE ZIEGLER**

## Remerciements

Recevoir le prix Latsis est, pour tout scientifique de notre pays, un grand honneur et une immense distinction, et je suis par conséquent extrêmement heureux que le jury de l'Université de St.-Gall et le Conseil de la Fondation Latsis aient jugé mon travail digne de ce prix. Je tiens à remercier la Fondation Latsis pour sa générosité. De nombreuses personnes ont contribué à rendre ceci possible : les professeurs Darrell Duffie, Heinz Müller et Heinz Zimmermann (lauréat du prix Latsis en 1989), qui m'ont conseillé et soutenu dans mes travaux, ainsi que ma famille, mes amis et mes collègues, qui supportent une personne parfois un peu rêveuse.

## Introduction

L'immense majorité des théories classiques des marchés financiers considère comme connus le rendement moyen et le risque des actifs financiers. Alors que le risque peut être estimé avec précision, tel n'est malheureusement pas le cas pour le rendement moyen. En effet, des résultats théoriques obtenus en statistiques démontrent que l'estimation d'une moyenne est en général plus délicate et beaucoup moins stable que l'estimation d'une mesure de dispersion comme le risque. Par conséquent, alors que l'hypothèse que le risque des actifs est connu est relativement défendable, celle que leurs rendements attendus le sont également l'est beaucoup moins.

L'impossibilité d'estimer les rendements moyens avec précision signifie que les investisseurs agissant sur les marchés financiers font face à deux sources de risque :

1. La première, analysée par les théories classiques, est le risque de fluctuation des cours.
2. La seconde découle de l'incertitude des investisseurs quant à la vraie valeur du rendement attendu.

La présence de cette seconde source de risque soulève un certain nombre de questions, qui constituent l'objet de mes travaux :

1. Tout d'abord, quel est l'impact de cette incertitude supplémentaire sur le prix des actifs financiers ? En particulier, est-il vrai qu'elle conduit

à une baisse de la valeur des actifs ? En d'autres termes, est-il vrai que le prix d'un actif dont on ne connaît pas le rendement moyen est nécessairement plus bas que celui d'un actif dont le rendement moyen est connu, comme on pourrait le supposer intuitivement ?

2. La seconde série de questions est suscitée par l'observation suivante : Si les rendements attendus ne sont pas connus des investisseurs et doivent être estimés par ces derniers, il n'est plus garanti que tous les investisseurs aient des attentes similaires, comme on le suppose en général dans la théorie classique. Il est fort probable que les investisseurs seront en désaccord quant au rendement moyen des différents actifs, bref, que leurs opinions quant au futur divergent. Quelles conséquences ceci aura-t-il pour les portefeuilles qu'ils détiendront, pour leur consommation future, et pour les prix des actifs financiers ?

Pour la clarté de l'exposé, je vais présenter ici quelques-unes des réponses à ces questions d'une manière aussi intuitive que possible, ainsi que leurs conséquences pour la pratique. Commençons par la première, l'impact de l'incertitude sur les prix.

### **1. L'Impact de l'Incertitude sur les Prix**

La réponse à la première question est qu'une meilleure information des acteurs ne conduit pas nécessairement à des prix plus élevés sur le marché. Bien au contraire, il peut arriver que les prix *augmentent* lorsque la qualité de l'information se détériore.

Afin de comprendre pourquoi ceci se produit, comparons deux entreprises. Supposons que chacune de ces entreprises sera liquidée dans 4 ans et que chacune a fait, cette année (en l'an 0), un bénéfice de 1 franc. Dans le cas de la première entreprise, ce bénéfice va croître de 10 % par an pendant 4 ans. Le bénéfice de la seconde entreprise va quant à lui soit rester constant, soit croître de 20 % par an, la probabilité de chacune de ces deux situations étant de 50 %.

En d'autres termes, le taux de croissance moyen du bénéfice annuel des deux entreprises est de 10 %. Dans le cas de la première, les investisseurs sont certains que cette croissance sera de 10 %, alors que dans le cas de la seconde, ils ne savent pas si cette croissance sera de 20 % ou de 0 %.

Dans cette situation, le bénéfice annuel moyen des deux entreprises est donc le suivant :

Année	1	2	3	4
Entreprise 1	1.1	1.21	1.331	1.4641
Entreprise 2	$\frac{1 + 1.2}{2} = 1.1$	$\frac{1 + 1.44}{2} = 1.22$	$\frac{1 + 1.728}{2} = 1.364$	$\frac{1 + 2.0736}{2} = 1.5368$

Quelle est la valeur des actions des deux entreprises ? Si l'on ignore l'effet du taux d'intérêt et du risque – une simplification qui n'enlève rien à la validité du résultat –, la valeur de chacune des entreprises est simplement la somme des valeurs de ses bénéfices futurs. La première entreprise vaut donc

$$1.1 + 1.21 + 1.331 + 1.4641 = 5.1051,$$

alors que la seconde vaut

$$1.1 + 1.22 + 1.364 + 1.5368 = 5.2208.$$

La valeur de l'entreprise au sujet de laquelle l'incertitude est la plus grande est donc *plus élevée*.

S'agit-il ici simplement d'un exercice purement théorique sans aucune conséquence quelconque pour le monde réel ? Malheureusement pas. Le phénomène que nous avons observé ici peut notamment expliquer les prix extrêmement élevés des actions de sociétés de la nouvelle économie à la fin des années nonante – un phénomène généralement qualifié de *bulle internet*. En effet, que savait-on réellement des perspectives de rentabilité de sociétés comme amazon ou yahoo en 1999 ? Pas grand chose.

L'analyse présentée ici démontre que des prix élevés sont parfaitement justifiés tant que la qualité de l'information est mauvaise, mais qu'ils doivent *chuter au moment où cette dernière s'améliore*. Ceci est assez proche de ce qui a été observé sur les marchés. Bien sûr, le phénomène décrit ici ne constitue pas la seule et unique raison de la bulle internet, mais y a contribué.

Passons maintenant à la seconde question, l'impact des divergences d'opinion sur les portefeuilles, la consommation et les prix.

## 2. L'Impact des Divergences d'Opinion sur les Portefeuilles, la Consommation et les Prix

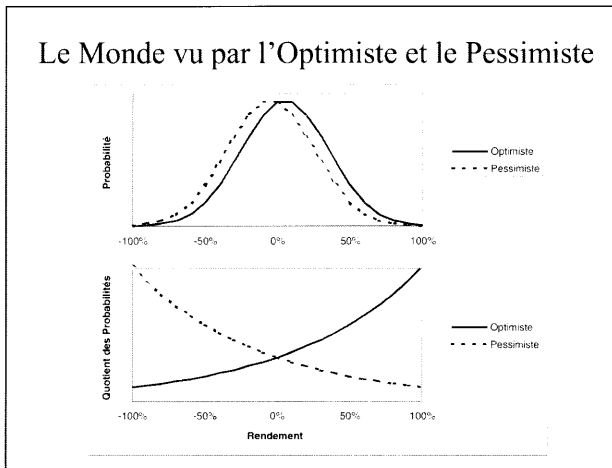
Comme nous l'avons vu, lorsque les rendements attendus doivent être estimés, les investisseurs auront en règle générale des opinions diffé-

rentes quant à l'avenir. Lors du choix de son portefeuille, chaque investisseur devra prendre en compte le fait que les prix futurs seront influencés par les prévisions des autres acteurs du marché. Dès lors, chaque investisseur cherchera à se prémunir contre un risque nouveau : celui d'une évolution défavorable de la *différence* entre ses propres attentes et celles des autres. Les divergences d'opinion auront donc un impact sur les portefeuilles détenus par chaque investisseur, et par conséquent également sur leur consommation et sur les prix des actifs financiers.

Il existe en fait un lien direct entre les portefeuilles et la consommation, mais l'analyse basée sur la consommation est plus intuitive. Je commencerai donc par cette dernière.

Les divergences d'opinion peuvent prendre deux formes principales :

1. Tout d'abord, le rendement attendu peut être différent parmi les investisseurs. Cette situation est illustrée dans le graphique ci-dessous, qui montre la probabilité qu'un optimiste et un pessimiste attachent à différents rendements sur une action, ainsi que le quotient de ces deux probabilités.



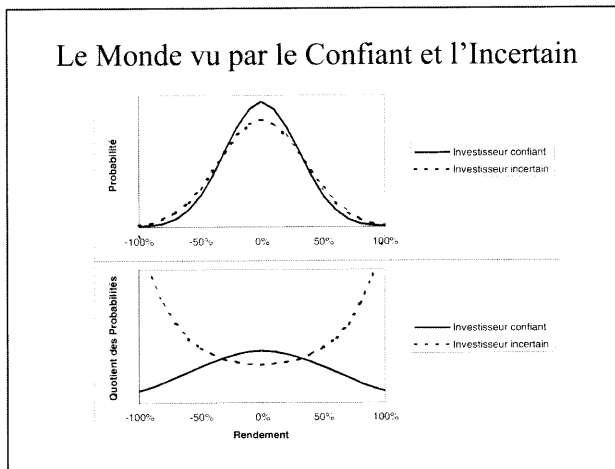
Lorsqu'ils choisissent leur plan de consommation – c.-à-d. combien ils vont consommer en fonction du rendement –, les deux investisseurs comparent la probabilité qu'ils attachent aux différents rendements au prix de la consommation si ces rendements se réalisent. Ces prix à leur tour dépendent de la probabilité qu'attachent les autres

investisseurs à ces rendements. Par l'intermédiaire des prix, chaque investisseur prend donc en compte le quotient entre sa propre estimation de probabilité et celles des *autres* lorsqu'il choisit sa consommation optimale. Dans notre exemple, l'optimiste prend en compte ce que pense le pessimiste, et réciproquement. La quantité que chaque investisseur consommera dépendra directement de ce facteur.

Dans le cas qui nous intéresse, l'optimiste consommera de plus en plus à mesure que le cours de l'action augmente, et le pessimiste de moins en moins. Par conséquent, la répartition des risques dans l'économie est affectée par les divergences d'opinion.

Les portefeuilles qui donnent lieu à ces plans de consommation optimaux peuvent être déterminés en notant que la *pente* du plan de consommation est proportionnelle au *nombre d'actions* détenues par l'investisseur. Dans notre exemple, les portefeuilles sont donc les suivants : L'optimiste achète de plus en plus d'actions à mesure que leur cours augmente. À l'inverse, le pessimiste en vend de plus en plus à mesure que leur cours diminue. En d'autres termes, les différences d'opinion donnent lieu à des portefeuilles dits dynamiques – leur composition change au cours du temps.

2. La seconde forme de divergence d'opinion se produit lorsque les deux investisseurs ont la même estimation du rendement attendu mais ont un *degré de confiance* différent dans cette estimation. Dans cette situation, la distribution des rendements telle que perçue par l'invest-



tisseur confiant dans ses estimations est plus concentrée que celle de l'investisseur incertain, comme illustré dans la figure ci-dessous.

Le quotient des probabilités – et donc le plan de consommation – prend alors une forme en U pour l'investisseur incertain, et une forme en cloche pour l'investisseur confiant. La conséquence pour les portefeuilles optimaux est immédiate : Lorsque le cours de l'action diminue, l'investisseur incertain révisé son appréciation de la situation à la baisse plus rapidement que l'investisseur confiant. Il devient donc relativement pessimiste et vend une partie de ses actions à l'investisseur confiant. De la même manière, lorsque le cours de l'action augmente, l'investisseur incertain devient progressivement plus optimiste que l'investisseur confiant et lui achète une partie de ses actions. C'est ce phénomène qui donne lieu à un plan de consommation en forme de U.

Puisque les divergences d'opinion influencent le comportement des investisseurs, elles auront un effet sur les prix d'équilibre sur le marché. Toutefois, ces prix ne reflètent en général pas l'information dont disposent les acteurs dans leur ensemble. En d'autres termes, les prix observés sur un marché où chaque investisseur agit sur la base de ses propres opinions sont différents de ceux qu'on observerait sur un marché où les investisseurs auraient mis leur information en commun. On peut montrer que les divergences d'opinion sont susceptibles de conduire aussi bien à une hausse qu'à une baisse des prix, et que l'écart entre les prix observés sur le marché et ceux qui prévaudraient si l'information était parfaitement agrégée dépend de l'attitude des acteurs face au risque.

## **Conclusion**

Pour conclure, l'incertitude des investisseurs quant aux rendements attendus des actifs financiers et leurs divergences d'opinion ont un impact aussi bien sur les prix observés sur le marché que sur les portefeuilles détenus par les investisseurs et sur la consommation qui en résulte. Malgré les quelques résultats présentés ici, l'effet des divergences d'opinion sur les prix, bien qu'essentiel, est encore mal compris. C'est une des questions auxquelles je compte consacrer une partie de mon temps à l'avenir.